谱分析方法在Navier-Stokes方程中的应用

韩丕功

(中国科学院数学与系统科学研究院)

2020年12月04日, 武汉大学, 武汉

1. 背景介绍

三维不可压缩Navier-Stokes方程:

$$\partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f(x,t), \quad \nabla \cdot u = 0.$$

其中$\nu > 0$表示粘性系数, u是速度场, p是压强函数.
Navier-Stokes方程是由一组二阶非线性非标准抛物型和一阶椭圆型偏微分方程组成的混合型方程组, 该方程本身不能做任何的改动, 研究起来有极大的困难. Navier-Stokes方程描述粘性不可压缩流体的运动规律, 反映了真实流体流动的基本力学规律, 在流体力学中具有十分重要的意义, 自然界中大量的流体模型, 例如具有热传导效应的流体动力学模型,磁流体动力学模型, 海洋动力学模型, 以及描述血液在动脉和静脉中的流动等管道流的数学模型, 其主部均为Navier-Stokes方程. 因此, Navier-Stokes方程具有很强的物理背景, 在生活、环保、科学技术及水利工程中有很强的应用价值, 是当今非线性科学研究中的重点和热点问题.

对Navier-Stokes方程的研究已有一百多年的历史, 关于三维不可压缩Navier-Stokes方程具有有限能量光滑初值整体正则解的存在性或该解在有限时间内爆破是美国Clay研究所公布的七大千禧年问题之一.

不可压缩Navier-Stoke方程系统的理论研究始于法国著名数学家J. Leray (法国科学院院士) 1934年的开创性工作. Leray首次构造了二维、三维情形下具有有限能量的一类整体弱解, Leray还进一步分析了他所构造的弱解关于时间的可能奇异点集合的Hausdorff测度估计. Leray首次提出:

Navier-Stokes方程的弱解在L^2范数意义下是否长时间衰减趋于零?

半个世纪后这个问题才被Schonbek, Wiegner和Miyakawa等人分别独立解决, 所用方法主要是Schonbek创立的Fourier分离技巧, Wiegner建立的基本不等式, 以及Miyakawa等人建立的谱分析方法.

考虑如下不可压缩Navier-Stokes的齐次Cauchy问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \nabla \cdot u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = a, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中函数$u = (u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots, u_n(x,t))$ $(n \geq 2)$ 和$p = p(x,t)$ 分别表示未知的流体速度场和压强; $a = a(x)$ 是给定的初始向量场, 且在广义意义下满足不可压特征: $\nabla \cdot a(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$.

弱解定义. 假定$a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$. 称向量函数$u \in L^\infty(0,\infty; L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n))$为问题(1.1)的弱解, 如果对任意的$\varphi \in C_0^\infty([0,\infty); C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n))$, 下式成立:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (-u\partial_\tau \varphi + \nabla u \cdot \nabla \varphi + (u \cdot \nabla)u \cdot \varphi) dx d\tau = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\varphi(x,0)dx.$$

进一步, 如果对几乎处处的时间$t \in (0,\infty)$, 下述能量不等式成立:

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \le \|a\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

则称弱解u为问题(1.1)的Leray-Hopf弱解. 此外, 如果Leray-Hopf弱解u满足: $u \in L^\infty(0,\infty; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n))$, 则称$u$为问题(1.1)的强解.

2. 谱分析方法

在$\mathbb{R}^n$上考虑Navier-Stokes方程的初值问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0 \ \text{ 在 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \text{ 上}, \\ \nabla \cdot u = 0 \ \text{ 在 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \text{ 上}, \\ u(x, 0) = a(x) \ \text{ 在 } \mathbb{R}^n \text{ 上}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中$n \geq 2$, $u = (u^1, u^2, \cdots, u^n)$, p分别表示未知速度与压强函数, $a = (a^1, a^2, \cdots, a^n)$是给定的初始速度场.

定理2.1. 设$a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. 则问题(2.1) 存在一个弱解u, 满足下面性质:

(i) 当$t \longrightarrow \infty$ 时, $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$.

(ii) 如果$a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq r < 2$, 则

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}, \ \forall t \geq 0,$$

其中, C 仅依赖于n, r 与a.

定理2.1中得到的结果是最佳的. 事实上, 还有如下结果.

定理2.2. 如果u 是定理2.1中得到的弱解, u_0是具有相同初值$a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$的线性热方程的解. 则

(iii) 当$t \to \infty$ 时, $\|u(t) - u_0(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = o(t^{1/2-n/4})$.

(iv) 如果$a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq r < 2$, 则当$t \to \infty$ 时, 成立

$$\|u(t) - u_0(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = o(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}).$$

定理2.1的证明. 在Caffarelli-Kohn-Nirenberg的文献(CPAM, 1982) 中引入的问题(2.1) 的逼近解$u_N, N = 1, 2, \cdots$, 满足:

$$\frac{du_N}{dt} + P(w_N \cdot \nabla)u_N + Au_N = 0, t > 0, u_N(0) = a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n),$$

其中, w_N是u_N的某种延迟磨光(见本节后面的附录A); P是$L^2(\mathbb{R}^n)$到$L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$的有界投影算子; A是$L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$中定义域为$D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$的n维拉普拉斯算子$-\Delta$. 这是因为P与A在$D(A)$中可交换. 为证定理2.1, 2.2, 我们需要u_N与w_N一些性质. 这些性质的证明参见附录A.

(a) 对于$T > 0$, u_N存在且唯一, 还属于$L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^n))$.

(b) w_N及其导数在区域: $\mathbb{R}^n \times [0,T]$上连续有界,且满足: $\|w_N\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \leq \|u_N\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times[0,T])}$ (这是由磨光函数的性质得到的). 此外, 我们还有$\nabla \cdot w_N = 0$, 以及对于$t \geq 0$, 成立

$$\int_0^t \|w_N(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \leq \int_0^t \|u_N(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds.$$

(c) $u_N \in C^1((0,\infty);L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)) \cap C([0,\infty);L^2_\sigma(\mathbb{R}^n))$, 且满足

$$(d/dt)\|u_N(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2(u_N(t),u_N'(t)),\ \text{其中},u_N' = du_N/dt.$$

(d) 存在u_N的子序列, 其在$L^2_{loc}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$中收敛于问题(2.1) 的弱解$u$, $u \in L^\infty(0,T;L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$.

我们知道, 对于$n = 2$, 问题(2.1) 存在唯一的强解u, 满足上面性质(a)与(c). 根据性质(c)与$(P(u\cdot\nabla)u, u) = 0$, 可知$u$满足下面能量不等式:

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds \le \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \tag{2.2}$$

在给出定理2.1的证明之前, 我们观察到下面事实: 如果$n \ge 3$, u_N满足下面形式的估计

$$\|u_N(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le f(t), \quad t > 0,$$

其中, f是不依赖于N的连续函数. 由上面性质(d)易知, 对于u_N的子列极限得到的弱解u, 同样的估计除去一个零测度集外仍然成立. 因弱解从$[0,\infty)$到L^2在弱拓扑下是连续的, $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$是下半连续的. 于是, 对于$t > 0$, u满足上面估计.

基于上述这些性质, 我们考虑

$$\frac{du}{dt}+P(w\cdot\nabla)u+Au=0,\ \ t>0,\ \ u(0)=a\in L^2_\sigma. \tag{2.3}$$

这里, 若$n\geq 3$, 我们固定N, 取$u=u_N, w=w_N$; 若$n=2$, 记$w=u$, u是问题(2.1)的强解. 我们将得到关于函数u的估计. $n\geq 3$的情形, 这些估计与N无关, 令$N\to\infty$, 便得到想要的估计. 记

$$A=\int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$$

为A的谱分解. 由附录B, 可知

$$\|E(\lambda)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}=(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|^2\leq\lambda}|\hat{v}(\xi)|^2d\xi,\ \ \forall v\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

这里, 傅里叶变换定义如下:

$$\hat{v}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}v(x)dx.$$

为证定理2.1, 我们利用傅里叶变换理论先证如下引理.

引理2.3. 对于$\lambda > 0$, 以及$u, w \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\nabla \cdot w = 0$. 成立

$$\|E(\lambda)P(w\cdot\nabla)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\lambda^{(n+2)/4}, \tag{2.4}$$

其中, C仅依赖于n.

证明 利用Helmholtz分解: $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \oplus G(\mathbb{R}^n)$, 其中$G(\mathbb{R}^n) = \{\nabla p \in L^2(\mathbb{R}^n); p \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)\}$. $P : L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 是有界的正交投影. 故对任意的$u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 成立

$$(Pu, v) = (Pu, Pv) = (u, Pv),$$

说明$P = P^*$. 进一步, 记$u = Pu + \nabla p$, 成立

$$\begin{aligned}(E(\lambda)Pu, v) &= (E(\lambda)Pu, Pv)\\ &= (E(\lambda)u, Pv) - (E(\lambda)\nabla p, Pv)\\ &= (E(\lambda)u, Pv) = (PE(\lambda)u, v).\end{aligned}$$

表明$E(\lambda)P = PE(\lambda)$.

从而,

$$\begin{aligned}\|E(\lambda)P(w\cdot\nabla)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} =& \|PE(\lambda)(w\cdot\nabla)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ \le& C\|E(\lambda)(w\cdot\nabla)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ =& C\int_{|\xi|^2\le\lambda}|\widehat{(w\cdot\nabla)}u(\xi)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

由$\nabla\cdot w=0$知, $(w\cdot\nabla)u=\sum\limits_{j=1}^n\partial_j(w^ju)$. 从而,

$$|\widehat{(w\cdot\nabla)}u(\xi)|=|\xi_j\widehat{w^ju}(\xi)|\le|\xi|\||w|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\le C|\xi|\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|^2\le\lambda}|\widehat{(w\cdot\nabla)}u(\xi)|^2 d\xi &\le C\|w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\int_{|\xi|^2\le\lambda}|\xi|^2 d\xi\\ &\le C\|w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\lambda^{(n+2)/2}. \quad\square\end{aligned}$$

定理2.1 的证明.

结论(i)的证明 在问题(2.1)中方程的两边同乘以u, 结合性质(c)与

$$(P(w\cdot\nabla)u,u)=0,$$

可得

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+2\|A^{1/2}u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}=0.$$

对于任意固定的$\rho>0$, 上面等号左端第二项可估计如下:

$$\begin{aligned}\|A^{1/2}u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}&=\int_0^\infty \lambda d\|E(\lambda)u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\&\geq\int_\rho^\infty \lambda d\|E(\lambda)u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\&\geq\rho\int_\rho^\infty d\|E(\lambda)u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\&=\rho(\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}-\|E(\rho)u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}).\end{aligned}$$

从而

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\rho\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le\rho\|E(\rho)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},\quad\forall\,\rho>0. \tag{2.5}$$

为估计上面右端项, 考虑(2.3) 的积分形式:

$$u(t)=e^{-tA}a+\int_0^t e^{-(t-s)A}F(w,u)(s)ds,$$

其中, $\{e^{-tA}\}_{t\ge0}$为由$-A$生成的半群, $F(w,u)=-P(w\cdot\nabla)u$.
将$E(\rho)$作用在上述等式的两边, 成立

$$E(\rho)u(t)=E(\rho)e^{-tA}a+\int_0^t E(\rho)e^{-(t-s)A}F(w,u)(s)ds.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_0^t E(\rho)e^{-(t-s)A}F(w,u)(s)ds\\=\;&\int_0^t e^{-(t-s)A}E(\rho)F(w,u)(s)ds\\=\;&\int_0^t\Big[\int_0^\infty e^{-(t-s)\lambda}dE(\lambda)E(\rho)F(w,u)(s)\Big]ds\\=\;&\int_0^t\Big[\Big(\int_0^\rho+\int_\rho^\infty\Big)e^{-(t-s)\lambda}dE(\lambda)E(\rho)F(w,u)(s)\Big]ds\\=\;&\int_0^t\Big[\int_0^\rho e^{-(t-s)\lambda}dE(\lambda)F(w,u)(s)\Big]ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \big[\int_0^\rho d\{e^{-(t-s)\lambda}E(\lambda)F(w,u)(s)\}\big]ds \\
&\quad + \int_0^t (t-s)\big[\int_0^\rho e^{-(t-s)\lambda}E(\lambda)F(w,u)(s)d\lambda\big]ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)\rho}E(\rho)F(w,u)(s)ds \\
&\quad + \int_0^t (t-s)\Big[\int_0^\rho e^{-(t-s)\lambda}E(\lambda)F(w,u)(s)d\lambda\Big]ds.
\end{aligned}
$$

因此可得

$$
\begin{aligned}
E(\rho)u(t) =& E(\rho)e^{-tA}a + \int_0^t e^{-\rho(t-s)}E(\rho)F(w,u)(s)ds \\
&+ \int_0^t (t-s)\Big(\int_0^\rho e^{-\lambda(t-s)}E(\lambda)F(w,u)(s)d\lambda\Big)ds.
\end{aligned}
$$

利用(2.4), 上式最后两项的L^2 范数可估计如下

$$
\begin{aligned}
&\leq C\rho^{(n+2)/4}\Big\{\int_0^t e^{-\rho(t-s)}\|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}(s)ds \\
&\quad+\int_0^t (t-s)\Big(\int_0^\rho e^{-\lambda(t-s)}\|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}(s)d\lambda\Big)ds\Big\} \\
&\leq C\rho^{(n+2)/4}\int_0^t \|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds \\
&\leq C\rho^{(n+2)/4}\Big(\int_0^t \|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds\Big)^{1/2} \\
&\leq C\rho^{(n+2)/4}\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds.
\end{aligned}
$$

这里, 在$n \geq 3$ 情形下, 我们已经用到了性质(b).

于是,

$$\|E(\rho)u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|e^{-tA}a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C\rho^{(n+2)/4}\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds. \tag{2.6}$$

由(2.2) 知, $\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. 从(2.5) 与(2.6), 可得

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \rho\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \le C\rho[\|e^{-tA}a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + t^2\rho^{(n+2)/2}], \quad \rho > 0.$$

令$\rho = \alpha t^{-1}$, $\alpha > 0$ 为待定常数. 在上述不等式两边乘以t^α, 可得

$$\frac{d}{dt}(t^\alpha\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) \le Ct^{\alpha-1}[\alpha\|e^{-tA}a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \alpha^{(n+4)/2}t^{1-n/2}],$$

其中C与α无关.

选取α, 使得$\alpha - n/2 > -1$. 注意到, $n = 2$时, α 可以取为任意大于0的常数. 在上式两端关于t进行积分, 可得

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ \leq \ & C\Big(\alpha t^{-\alpha}\int_0^t s^{\alpha-1}\|e^{-sA}a\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds \\ & +(\alpha+1-n/2)^{-1}\alpha^{(n+4)/2}t^{1-n/2}\Big). \end{aligned} \tag{2.7}$$

如果$n \geq 3$, u便是任一u_N. 因为$1 - n/2 \leq -1/2$, 以及当$t \to \infty$时, $\|e^{-tA}a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$. 从而, 当$t \to \infty$时, 关于$N$一致地成立: $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$. 这样就证明了$n \geq 3$情形下的结论(i).

如果$n = 2$. 此时, u是问题(2.1)的强解. 对于任意$\alpha > 0$, (2.7) 变为

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\Big(\alpha t^{-\alpha}\int_0^t s^{\alpha-1}\|e^{-sA}a\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}ds + \alpha^2\Big).$$

从而, 对于任意$\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\alpha^2$, 其中$C$与$\alpha$无关. 由此便得$n = 2$ 情形的结论(i), 即: $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0$.

结论(ii)的证明. 我们利用卷积形式的Young不等式, 可得下面熟知的(L^r, L^q) 估计: 设$1 \le r \le q \le \infty$, 成立

$$\|e^{-tA}a\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|G_t * a\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le Ct^{-(n/r-n/q)/2}\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.8}$$

其中$G_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ 是热方程的基本解.

我们先考虑$n \ge 3$的情况.

记$a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 \le r < 2$. 利用(2.7), 并结合(2.8), 可得

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C(t^{-(n/r-n/2)}\|a\|^2_{L^r(\mathbb{R}^n)} + t^{1-n/2}). \tag{2.9}$$

如果$n(1/r-1/2)\le n/2-1$, 便可得到结论. 如果$n(1/r-1/2)>n/2-1\ge 1/2$. 由(2.9), 可得, $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\le Ct^{-1/2}$. 于是, 从(2.6), 可知

$$\|E(\rho)u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le \|e^{-tA}a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+C\rho^{(n+2)/4}t^{1/2}.$$

由(2.5), 可得

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+\rho\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\le C\rho[t^{-(n/r-n/2)}\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^2+\rho^{(n+2)/2}t].$$

令$\rho=nt^{-1}$, 两边乘以t^n, 可得

$$\frac{d}{dt}(t^n\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2)\le C[t^{n-1-(n/r-n/2)}+t^{-1+n/2}].$$

于是

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\le C[t^{-(n/r-n/2)}+t^{-n/2}].$$

由$1\le r<2$可得, $n(1/r-1/2)\le n/2$, 由此可得结论.

下面考虑$n=2$的情形. 此时, (2.9)不能给出$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$的衰减估计, 上面的论证方法失效. 于是, 我们采用其它方法来估计(2.6)的右边. 考虑如下方程

$$u(t)=e^{-tA}a+\int_0^t e^{-(t-s)A}Fu(s)ds \tag{2.10}$$

其中, $Fu=F(u,u)=-P(u\cdot\nabla)u$. (注意, $w=u$, u 是问题(2.1) 在$n=2$ 时的强解.)
设$a\in L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)\cap L^r(\mathbb{R}^2)$, $1<r<2$. 注意到, 算子$P:\ L^r(\mathbb{R}^2)\to L^r_\sigma(\mathbb{R}^2)$ 的有界性. 由(2.10), 可得

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}\leq&\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}+C\int_0^t(t-s)^{-1+\frac{1}{r}}\|(u\cdot\nabla)u(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}ds\\ \leq&\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}+C\int_0^t(t-s)^{-1+\frac{1}{r}}\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}ds\\ \leq&\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}+C\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big(\int_0^t(t-s)^{-2+\frac{2}{r}}ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^t\|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}ds\Big)^{\frac{1}{2}}\\ \leq&\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}+C\|a\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}t^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

从而, $u(t) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^2) \cap L^r(\mathbb{R}^2),\ t \geq 0$. 此外, 由结论(i): $\lim\limits_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^2} = 0$, 我们不妨假定$a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^2) \cap L^r(\mathbb{R}^2)$ 且$\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$可以任意小. 否则, 用$u(t)$(要求$t >> 1$)代替$a$. 由(2.8), (2.9), 我们得到

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq & \|e^{-tA}a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t \|e^{-(t-s)A}P(u\cdot\nabla)u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}ds \\
\leq & \|e^{-tA}a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C\int_0^t (t-s)^{-(1-\frac{1}{2})}\|(u\cdot\nabla)u(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}ds \\
\leq & t^{-(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}ds.
\end{aligned}
$$

由于$1 < r < 2$, 故可以选取q, 使得$2 < q < (1/r - 1/2)^{-1}$. 因$1 + 1/q = 1/2 + (q+2)/2q$, 对上述估计应用一维的Hardy-Littlewood-Sobolev不等式, 可得

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^q ds\Big)^{1/q} \leq & C\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} t^{1/q-1/r+1/2} \\ & + C\Big(\int_0^t (\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)})^{2q/(q+2)} ds\Big)^{(q+2)/2q} \\ \leq & C\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} t^{1/q-1/r+1/2} \\ & + C\Big(\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^q ds\Big)^{1/q}\Big(\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds\Big)^{1/2} \\ \leq & C\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} t^{1/q-1/r+1/2} + C\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big(\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^q ds\Big)^{1/q}.\end{aligned}$$

如果$C\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 1/2$, 则上面估计可给出

$$\Big(\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^q ds\Big)^{1/q} \leq 2C\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} t^{1/q-1/r+1/2}.$$

由(2.6)以及上述估计, 可得

$$\begin{aligned}\|E(\rho)u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le & Ct^{-(1/r-1/2)}\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} + C\rho t^{1-2/q}\Big(\int_0^t \|u(s)\|^q_{L^2(\mathbb{R}^2)}ds\Big)^{2/q} \\ \le & Ct^{-(1/r-1/2)}\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} + C\rho\|a\|^2_{L^r(\mathbb{R}^2)}t^{2-2/r}.\end{aligned}$$

将上式代入(2.5), 可知

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \rho\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le C\rho\|E(\rho)u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le C\rho(t^{-2(1/r-1/2)} + \rho^2 t^{4(1-1/r)}).$$

取$\rho = \alpha t^{-1}$, 结合上式, 可得

$$\frac{d}{dt}\big(t^{\alpha}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\big) \le Ct^{\alpha-1}(t^{1-2/r} + t^{4(1/2-1/r)}).$$

进而, $\alpha > 0$ 充分大时, 可得

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le C(t^{-2(1/r-1/2)} + t^{-4(1/r-1/2)}).$$

由于$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \forall t \ge 0$. 因此

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le C(1+t)^{-2(1/r-1/2)}.$$

这样, 对于$1 < r < 2$, $n = 2$, 我们就得到了结论(ii).

下面假设$r=1, n=2$. 则$a\in L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)\cap L^1(\mathbb{R}^2)\subset L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)\cap L^{4/3}(\mathbb{R}^2)$. 从而在上式中取$r=\frac{4}{3}$, 可得$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\leq Ct^{-1/2}$. 利用(2.6), 可得

$$\|E(\rho)u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\leq C(t^{-1/2}+\rho t^{1/2}).$$

将上式代入(2.5), 可得

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}+\rho\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\leq C\rho\|E(\rho)u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\leq C\rho(t^{-1}+\rho^2 t).$$

选取$\rho=\alpha t^{-1}$, $\alpha>1$, 结合上式, 有

$$\frac{d}{dt}\left(t^\alpha\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right)\leq Ct^{\alpha-2}.$$

从而成立

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\leq Ct^{-1}. \qquad \square$$

定理2.2的证明.

我们讨论函数$v(t) = u(t) - u_0(t)$ 的L^2 渐近行为, 其中, u 是问题(2.1)的解, $u_0 = e^{-tA}a$是与u 具有相同初值a 的热方程的解. 从而, v 满足

$$\frac{dv}{dt} + Av = -P(w \cdot \nabla)u, \ \ v(0) = 0.$$

因此,

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|A^{1/2}v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2B(w, u, v)(t),$$

其中, $B(w, u, v) = -(P(w \cdot \nabla)u, v) = -(w \cdot \nabla u, v)$.

直接计算易得

$$B(w,u,v) = -B(w,v,u) = -B(w,v,v) - B(w,v,u_0) = -B(w,v,u_0).$$

由(2.8)知, $\|u_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-n/2r}\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$, $a \in L^r_\sigma(\mathbb{R}^n)$, 从而可得

$$\begin{aligned}
2|B(w,v,u_0)| &\leq 2\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= 2\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|A^{1/2}v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq Ct^{-n/2r}\|a\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|A^{1/2}v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C\|a\|^2_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}t^{-n/r} + \|A^{1/2}v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

于是

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|A^{1/2}v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|a\|^2_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}t^{-n/r}. \tag{2.11}$$

对任意的$\rho > 0$, 成立:

$$\begin{aligned}\|A^{1/2}v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} =& \int_0^\infty \lambda d\|E(\lambda)v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \geq& \int_\rho^\infty \lambda d\|E(\lambda)v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \geq& \rho\int_\rho^\infty d\|E(\lambda)v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ =& \rho(\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \|E(\rho)v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}).\end{aligned}$$

由(2.11), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \rho\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \leq\ & \rho\|E(\rho)v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|a\|^2_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}t^{-n/r},\ \rho > 0.\end{aligned} \tag{2.12}$$

注意到下述积分方程成立:

$$v(t)=\int_0^t e^{-(t-s)A}F(w,u)(s)ds,$$

$$E(\rho)v(t)=\int_0^t E(\rho)e^{-(t-s)A}F(w,u)(s)ds,$$

以及前面已证:

$$\begin{aligned} &\int_0^t E(\rho)e^{-(t-s)A}F(w,u)(s)ds \\ = &\int_0^t e^{-(t-s)\rho}E(\rho)F(w,u)(s)ds \\ &+\int_0^t (t-s)\Big[\int_0^\rho e^{-(t-s)\lambda}E(\lambda)F(w,u)(s)d\lambda\Big]ds \end{aligned}$$

利用$n \geq 3$时, $w = w_N$的性质(b), 结合(2.4), 可得

$$
\begin{aligned}
& \|E(\rho)v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
\leq \ & \int_0^t e^{-(t-s)\rho} \|E(\rho)F(w,u)(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
& + \int_0^t (t-s) \int_0^\rho e^{-(t-s)\lambda} \|E(\lambda)F(w,u)(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\lambda ds \\
\leq \ & C\rho^{\frac{n+2}{4}} \int_0^t e^{-(t-s)\rho} \|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
& + C \int_0^t \int_0^\rho (t-s) e^{-(t-s)\lambda} \lambda^{\frac{n+2}{4}} \|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds d\lambda \\
\leq \ & C\rho^{\frac{n+2}{4}} \int_0^t \|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
& + C\rho^{\frac{n+2}{4}} \int_0^t \left[\int_0^\rho (t-s) e^{-(t-s)\lambda} d\lambda \right] \|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
\leq \ & C\rho^{(n+2)/4} \int_0^t \|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
\leq \ & C\rho^{(n+2)/4} \int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds.
\end{aligned}
$$

将上述估计代入(2.12)中, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \rho\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \leq\ & C\rho^{(n+4)/2}\Big(\int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds\Big)^2 + \|a\|^2_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}t^{-n/r}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

结论(iii)的证明.

假设$n \geq 2$, $a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$. 在(2.13)中, 令$r = 2$, $\rho = \alpha t^{-1}$, $\alpha > n/2 + 2$, 在两边乘以t^α, 可得

$$\frac{d}{dt}(t^\alpha\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \leq Ct^{\alpha-n/2-2}\Big(\int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds\Big)^2 + \|a\|^2_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}t^{\alpha-n/2}.$$

两边关于t 积分, 可得

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ \leq\ & Ct^{-\alpha}\Big[\int_0^t \tau^{\alpha-n/2-2}d\tau\Big(\int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds\Big)^2 \\ & +C\int_0^t s^{\alpha-n/2}\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds\Big]. \end{aligned}$$

利用α的选取, 可知

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \;\le\; & Ct^{1-n/2}\Big[\Big(t^{-1}\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds\Big)^2 \\ & +t^{-1}\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds\Big].\end{aligned} \tag{2.14}$$

在(i)中已证:当$t \longrightarrow \infty$时, $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ (若$n \geq 3$, 关于N是一致收敛), 从而当$t \longrightarrow \infty$时, (2.14)式中右边的积分趋于0. 说明结论(iii)成立.

(II) 结论(iv)的证明 我们只需证明下面结论.

命题2.4. 假设$a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 \le r < 2$. 则当$t \longrightarrow \infty$时, 成立

$$\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} O(t^{1+n/2-2n/r}), & n/r - n/2 < 1; \\ O(t^{-1-n/2}(\log t)^2), & n/r - n/2 = 1; \\ O(t^{-1-n/2}), & n/r - n/2 > 1. \end{cases}$$

注 利用上述结论, 简单计算表明: 当$t \longrightarrow \infty$时, 成立

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = o(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}).$$

证明. 先假定$n/r - n/2 < 1$. 由定理2.1, 可得

$$\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \le C(1+s)^{-(n/r-n/2)}, \quad s \ge 0.$$

于是, 从(2.13), 可知

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \rho\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \le C\rho^{(n+4)/2}t^{2-2(n/r-n/2)} + \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 t^{-n/r}.$$

令$\rho = \alpha t^{-1}$, 上面不等式两边同乘以t^α, 可得

$$\frac{d}{dt}(t^\alpha\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) \le C[t^{\alpha+n/2-2n/r} + \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 t^{\alpha-n/r}].$$

选取$\alpha > 2n/r - n/2$, $\alpha > n/r$, 两边再关于t积分, 得

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \le C\left(t^{1+n/2-2n/r} + t^{-n/r}\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds\right). \tag{2.15}$$

注意到,

$$\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds \le C\int_0^t (1+s)^{-(n/r-n/2)} ds \le Ct^{1-(n/r-n/2)}.$$

将上式代入(2.15), 得

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \le Ct^{1+n/2-2n/r}.$$

这样, 对于$n/r - n/2 < 1$, 我们就得到命题2.4中的估计.

下面考虑$n/r-n/2=1$的情形. 由定理2.1的结论(ii), 可知

$$\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C(s+1)^{-1}, \quad s\ge 0.$$

由(2.13), 可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \rho\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \le\ & C\rho^{(n+4)/2}[\log(1+t)]^2 + \|a\|^2_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}t^{-n/r}. \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{d}{dt}(t^\alpha\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \le C[t^{\alpha-2-n/2}(\log(t+1))^2 + \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}t^{\alpha-n/r}].$$

选取$\alpha>2+n/2$, $\alpha>n/r$, 当t充分大时, 有

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le & C[t^{-1-n/2}(\log(t+1))^2 + t^{-n/r}\int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds] \\ \le & Ct^{-1-n/2}(\log(t+1))^2. \end{aligned}$$

此时可得结论.

最后, 考虑$n/r-n/2>1$的情形. 记$\beta=\frac{n}{r}-\frac{n}{2}-1$, 则$\beta>0$. 从定理2.1, 可知

$$\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le C(s+1)^{-1-\beta},\ \ s\ge 0.$$

从而,

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt\le C.$$

因此, 由(2.13), 可得

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\rho\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le C\rho^{(n+4)/2}+\|a\|^2_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}t^{-n/r}.$$

进而成立

$$\frac{d}{dt}(t^\alpha\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})\le C[t^{\alpha-n/2-2}+\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}t^{\alpha-n/r}].$$

取充分大的α, 因为$1+n/2<n/r$, 故成立

$$
\begin{aligned}
\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq Ct^{-\alpha}\Big(\int_0^t s^{\alpha-n/2-2}ds + t^{\alpha-n/r}\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds\Big) \\
&\leq C(t^{-1-\frac{n}{2}} + t^{-\frac{n}{r}}) \\
&\leq Ct^{-1-n/2}, \quad \forall t>1.
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

结合能量不等式, 可得

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_0(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \geq 0.$$

从而由(2.16), 可知

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C(1+t)^{-1-n/2}, \quad \forall t \geq 0.$$

此即是我们想要的结果. 这样我们就完成命题2.4的证明. 进而, 定理2.2证毕. □

附录A

在本节中, 我们证明: Cafferalli-Kohn-Nirenberg文献(CPAM, 1982)中给出的问题(2.1)的逼近解序列u_N中存在一个子列收敛到问题(2.1)的弱解. Cafferalli-Kohn-Nirenberg在该文献中仅仅给出了$n = 3$时的证明. 这里, 我们给出$n \geq 3$时的证明梗概. 对于某个p_N, Cafferalli-Kohn-Nirenberg文献(CPAM, 1982)中定义的问题(2.1)的逼近解u_N满足:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_N}{\partial t} + (w_N \cdot \nabla) u_N - \Delta u_N + \nabla p_N = 0 \ \text{ 在 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \text{ 上}, \\ \nabla \cdot u_N = 0 \ \text{ 在 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \text{ 上}, \\ u_N(x, 0) = a(x) \ \text{ 在 } \mathbb{R}^n \text{ 上}. \end{aligned} \tag{A1}$$

其中, $a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$, w_N是如下定义的关于u_N的延迟磨光:

$$w_N(x,t)=\delta^{-n-1}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y/\delta,s/\delta)\tilde{u}_N(x-y,t-s)dyds,\ \delta=N^{-1},$$

其中, ψ是一个非负光滑函数, 满足:

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x,t)dxdt=1,\quad \text{supp}\psi\subset\{(x,t):|x|^2<t,1<t<2\}.$$

$\tilde{u}_N$是u_N的零延拓, u_N对于$t\geq 0$有定义. 由于suppψ的假设, 求解问题(A1) 等价于在区间$[(k-1)\delta,k\delta]$, $k=1,2,\cdots$上求解线性方程. 利用Faedo-Galerkin 方法易得, 对于任意$a\in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$, 以及任何$T>0$, 问题(A1) 存在唯一的解$u_N\in L^\infty(0,T;L^2_\sigma(\mathbb{R}^n))\cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$. w_N在条形区域$\mathbb{R}^n\times[0,T]$上的有界性与光滑性由其定义可得. 此外, 压力p_N在相差一个t的函数意义下由下面方程决定

$$-\Delta p_N=\nabla\cdot[(w_N\cdot\nabla)u_N]=\sum_{j,k=1}^n\partial x_j\partial x_k(w_N^j u_N^k).$$

从而

$$p_N = \sum_{j,k=1}^{n} R_j R_k (w_N^j u_N^k), \tag{A2}$$

$$\begin{aligned} \partial_\ell p_N &= \sum_{j,k=1}^{n} \partial_\ell R_j R_k [(w_N \cdot \nabla) u_N^k] \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} R_\ell R_k \partial_j (w_N^j u_N^k) \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} R_\ell R_k [(w_N \cdot \nabla) u_N^k], \quad \ell = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

其中, R_j, $j = 1, \cdots, n$ 是Riesz变换. 由Riesz变换在L^r, $1 < r < \infty$中的有界性, 可得

$$\|\nabla p_N\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C_N \|\nabla u_N\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

可以将问题(A1) 写成下面发展方程的形式

$$\frac{du_N}{dt} + P[(w_N \cdot \nabla)u_N] + Au_N = 0, \;\; t > 0, \;\; u_N(0) = a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n).$$

利用w_N的光滑性以及$\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ 在L^2_σ 上定义了一个有界的解析半群可知,

$$u_N \in C([0,\infty); L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)) \cap C^1((0,\infty); L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)), \qquad Au_N \in C((0,\infty); L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)).$$

于是, 我们可以得到前面的性质(c).

下面我们证明性质(d).

由性质(c)可得能量恒等式:

$$\|u_N(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_0^t \|\nabla u_N(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds = \|a\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad t > 0.$$

从而, 对任意$T>0$, u_N在$L^\infty(0,T;L^2_\sigma(\mathbb{R}^n))\cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$中有界, 再由嵌入定理知,

$$u_N \ \text{ 在 } \ L^{2+4/n}(\mathbb{R}^n\times(0,T)) \ \text{ 中有界.} \tag{A3}$$

由w_N的定义可知, w_N在上述空间中也是有界的. 确切地说, 对于$t>0$, 我们有

$$\|w_N(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \sup_{0<s<t}\|u_N(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)};$$

$$\int_0^t \|\nabla w_N(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds \le \int_0^t \|\nabla u_N(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds \le \|a\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)};$$

$$\int_0^t \|w_N(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds \le \int_0^t \|u_N(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds.$$

由此可得性质(b). 利用这些估计, 再结合(A2), 可得

$$\text{对于任意}\ \ T>0, p_N\ \ \text{在}\ \ L^{1+2/n}(\mathbb{R}^n\times(0,T))\ \ \text{中有界.} \tag{A4}$$

另一方面, 对于任意$m\geq n/2$, $T>0$, $\Delta u_N-(w_N\cdot\nabla)u_N$在$L^2(0,T;H^{-m})$中有界(可参见R. Temam专著中的第三章, 引理2.2). 因此, 从(A4), 可知

$$\text{对于任意}\ \ m\geq n/2, T>0,\ \partial_t u_N\ \ \text{在}\ \ L^{1+2/n}(0,T;H^{-m})\ \ \text{中有界.} \tag{A5}$$

由(A3), (A5)以及紧性定理可得, u_N 在$L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$中是准紧的. 由于$w_N$是关于$u_N$在时空点上的磨光函数, 故$w_N$ 在$L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$中也是准紧的, 从而$u_N$ 的每个聚点都是问题(2.1) 的弱解. $\square$

附录B

定义. 设$-\infty < \lambda < +\infty$, 称Hilbert 空间$X$ 上的一族投影$E(\lambda)$ 为(实)单位分解, 如果它满足:

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu)), \quad E(-\infty) = 0, \quad E(+\infty) = I, \tag{B1}$$

其中

$$E(-\infty)x = \lim_{\lambda\downarrow-\infty} E(\lambda)x,\ E(+\infty)x = \lim_{\lambda\uparrow+\infty} E(\lambda)x,$$

$$E(\lambda+0) = E(\lambda), \text{ 其中 } E(\lambda+0)x = \lim_{\mu\downarrow\lambda} E(\mu)x.$$

命题B.1 对任意的$x, y \in X$, $(E(\lambda)x, y)$ 是关于λ 的有界变差函数.

证明. 令$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. 根据(B1), $E(\alpha, \beta] = E(\beta) - E(\alpha)$ 是一个投影. 根据Schwartz 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_j |(E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x, y)| &= \sum_j |(E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x, E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]y)| \\
&\leq \sum_j \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x\| \cdot \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]y\| \\
&\leq \Big(\sum_j \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_j \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]y\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\|E(\lambda_1, \lambda_n]x\|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\|E(\lambda_1, \lambda_n]y\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|x\| \cdot \|y\|.
\end{aligned}$$

因为, 由(B1), 可得正交性

$$E(\lambda_{j-1}, \lambda_j] \cdot E(\lambda_{i-1}, \lambda_i] = 0, \quad i \neq j.$$

进一步有, 对于$m > n$,

$$\|x\|^2 \geq \|E(\lambda_n, \lambda_m]x\|^2 = \sum_{i=n}^{m-1} \|E(\lambda_i, \lambda_{i+1}]x\|^2.$$

命题B.2 令$f(\lambda)$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上的复值连续函数, 令$x \in X$. 则对于$-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, 我们可以定义

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dE(\lambda) x$$

为*Riemann* 和$\sum_j f(\lambda_j')E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x$ 在$\max_j |\lambda_{j+1} - \lambda_j|$ 趋于零时的强极限, 其中$\alpha = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = \beta$, $\lambda_j' \in (\lambda_j, \lambda_{j+1}]$.

证明. $f(\lambda)$ 在紧区间$[\alpha,\beta]$ 上是一致连续的. 设$|\lambda-\lambda'|\le\delta$ 时, $|f(\lambda)-f(\lambda')|\le\varepsilon$. 我们考虑$[\alpha,\beta]$ 的两个划分:

$$\alpha=\lambda_1<\cdots<\lambda_n=\beta,\ \ \max_j|\lambda_{j+1}-\lambda_j|\le\delta,$$

$$\alpha=\mu_1<\cdots<\mu_m=\beta,\ \ \max_j|\mu_{j+1}-\mu_j|\le\delta,$$

并令

$$\alpha=\nu_1<\cdots<\nu_p=\beta,\ \ p\le m+n.$$

为两个划分的叠加. 那么, 如果$\mu_k'\in(\mu_k,\mu_{k+1}]$, 我们有

$$\sum_j f(\lambda_j')E(\lambda_j,\lambda_{j+1}]x-\sum_k f(\mu_k')E(\mu_k,\mu_{k+1}]x=\sum_s\varepsilon_s E(\nu_s,\nu_{s+1}]x,$$

其中$|\varepsilon_s|\le 2\varepsilon$.

再根据命题B.1的结论, 有

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_j f(\lambda_j')E(\lambda_j,\lambda_{j+1}]x-\sum_k f(\mu_k')E(\mu_k,\mu_{k+1}]x\Big\|^2\\ \le&\varepsilon^2\Big\|\sum_s E(\nu_s,\nu_{s+1}]x\Big\|^2=\varepsilon^2\|E(\alpha,\beta]x\|^2\le\varepsilon^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

推论B.3 我们可以定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)dE(\lambda)x := \lim_{\alpha\downarrow-\infty,\beta\uparrow+\infty}\int_\alpha^\beta f(\lambda)dE(\lambda)x \ \ \text{(如果极限存在)}.$$

定理B.4 对于给定的$x \in X$, 下述三个条件互相等价:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE(\lambda)x \text{存在}, \tag{B2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty, \tag{B3}$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E(\lambda)y, x) \text{定义了一个有界线性泛函}. \tag{B4}$$

证明. 我们验证: $(B2) \Rightarrow (B4) \Rightarrow (B3) \Rightarrow (B2)$成立.

$(B2) \Rightarrow (B4)$. y 和$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)dE(\lambda)x$ 的近似Riemann 和的数量积是y 的有界线性泛函. 所以, 根据$(y, E(\lambda)x) = (E(\lambda)y, x)$ 和共鸣定理, 我们得到(B4).

$(B4) \Rightarrow (B3)$. 将算子$E(\alpha, \beta]$ 作用在$y = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}dE(\lambda)x$ 的近似Riemann 和上. 我们可以看出, 根据(B1), 有$y = E(\alpha, \beta]y$. 于是, 再根据(B1)有,

$$\begin{aligned}
\overline{F(y)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\lambda)}d(E(\lambda)x, y) \\
&= \lim_{\alpha'\downarrow-\infty, \beta'\uparrow+\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}d(E(\lambda)x, y) \\
&= \lim_{\alpha'\downarrow-\infty, \beta'\uparrow+\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}d(E(\lambda)x, E(\alpha, \beta]y) \\
&= \lim_{\alpha'\downarrow-\infty, \beta'\uparrow+\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}d(E(\alpha, \beta]E(\lambda)x, y) \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}d(E(\lambda)x, y) = \|y\|^2.
\end{aligned}$$

所以$\|y\|^2 \leq \|F\|\|y\|$, i.e. $\|y\| \leq \|F\|$.

另一方面, 用Riemann 和逼近$y = \int_\alpha^\beta \overline{f(\lambda)} dE(\lambda)x$, 根据(B1), 我们得到,

$$\|y\|^2 = \Big\| \int_\alpha^\beta \overline{f(\lambda)} dE(\lambda)x \Big\|^2 = \int_\alpha^\beta |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2,$$

所以$\int_\alpha^\beta |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 \leq \|F\|^2$. 令$\alpha \downarrow -\infty, \beta \uparrow +\infty$, 我们可以看出(B3) 成立.

$(B3) \Rightarrow (B2)$. 对于$\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$, 成立

$$\begin{aligned} & \Big\| \int_{\alpha'}^{\beta'} f(\lambda) dE(\lambda)x - \int_\alpha^\beta f(\lambda) dE(\lambda)x \Big\|^2 \\ = \; & \int_{\alpha'}^{\alpha} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 + \int_\beta^{\beta'} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2, \end{aligned}$$

所以(B3)蕴含(B2).

定理B.5 令$f(\lambda)$为实值连续函数. 那么可以通过下式定义一个自伴算子H,

$$(Hx, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E(\lambda)x, y), \tag{B5}$$

其中

$$x \in D(H) = D = \left\{x; \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty\right\},$$

并且任意的$y \in X$, 我们有$HE(\lambda) \supseteq E(\lambda)H$, 亦即, $HE(\lambda)$ 是$E(\lambda)H$ 的扩张.

证明. 对于任意的$y \in X$ 和任意的$\varepsilon > 0$, 存在α 和β, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, 满足$\|y - E(\alpha,\beta]y\| < \varepsilon$. 进一步, 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)E(\alpha,\beta]y\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)y\|^2.$$

所以$E(\alpha,\beta]y \in D$. 根据

$$f(\lambda) = \overline{f(\lambda)}, \quad (E(\lambda)x, y) = \overline{(E(\lambda)y, x)},$$

可得H 对称. 如果$y \in D(H^*)$ 并且$H^*y = y^*$, 则根据$E(\alpha,\beta]z \in D$ 和(B1),

$$(z, E(\alpha,\beta]y^*) = (E(\alpha,\beta]z, H^*y) = (HE(\alpha,\beta]z, y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d(E(\lambda)z, y).$$

于是, 根据共鸣定理,

$$\lim_{\alpha\downarrow-\infty,\beta\uparrow+\infty}(z, E(\alpha,\beta]y^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)d(E(\lambda)z, y) = F(z)$$

是一个有界线性泛函. 根据前述定理,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)y\|^2 < \infty,$$

亦即$y \in D$. 所以$D = D(H) \supseteq D(H^*)$. 由于$H$ 是对称的, 我们有$H \subseteq H^*$, 所以H 一定是自伴的, 即: $H = H^*$.

最后, 令$x \in D(H)$. 则将$E(\mu)$ 作用在$Hx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)dE(\lambda)x$ 的近似Riemann 和上, 我们根据(B1)可以得到,

$$E(\mu)Hx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)d(E(\mu)E(\lambda)x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)d(E(\lambda)E(\mu)x) = HE(\mu)x.$$

推论B.6 考虑特殊情形$f(\lambda)=\lambda$, 我们有

$$(Hx,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d(E(\lambda)x,y),\quad x\in D(H),\quad y\in X. \tag{B6}$$

可以形式上写作

$$H=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE(\lambda),$$

称其为<u>谱分解</u>, 或者是自伴算子H 的<u>谱表示</u>.

推论B.7 对于(*B5*)中给出的$H=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)dE(\lambda)$, 我们有

$$\|Hx\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2,\ \ \forall x\in D(H). \tag{B7}$$

特别地, 如果H 是有界自伴算子, 那么

$$(H^nx,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)^nd(E(\lambda)x,y),\ \ \forall x,y\in X\ \ (n=0,1,2,\cdots). \tag{B8}$$

证明. 因为$E(\lambda)Hx=HE(\lambda)x, \forall x\in D(H)$, 根据(B1), 我们有

$$\begin{aligned}
(Hx,Hx)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)x,Hx)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)d(HE(\lambda)x,x)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)d_\lambda\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(\mu)d_\mu(E(\mu)E(\lambda)x,x)\Big\}\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)d_\lambda\Big\{\int_{-\infty}^{\lambda}f(\mu)d_\mu(E(\mu)x,x)\Big\}\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)^2d\|E(\lambda)x\|^2.
\end{aligned}$$

推论的剩余部分可以类似证明.

例1 乘法算子

$$Hx(t) = tx(t), \quad x \in L^2(-\infty, +\infty)$$

准许谱分解$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$, 其中

$$E(\lambda)x(t) = \begin{cases} x(t), & t \le \lambda, \\ 0, & t > \lambda. \end{cases}$$

这是因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt = \|Hx\|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(E(\lambda)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} x(t)\overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tx(t)\overline{y(t)} dt = (Hx, y).$$

例2 自伴算子$-\Delta$的谱分解表达式为:

$$-\Delta = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda),$$

其中$E(\lambda)$的表达式如下:

$$\widehat{E(\lambda)u}(\xi) = \begin{cases} \hat{u}(\xi), & |\xi| \le \sqrt{\lambda}, \\ 0, & |\xi| > \sqrt{\lambda}. \end{cases} \tag{$B9$}$$

证明 对任意的$\lambda > 0$, 成立

$$\begin{aligned} \|\widehat{E(\lambda)u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{E(\lambda)u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| \le \sqrt{\lambda}} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^{\sqrt{\lambda}} \int_{|\omega|=r} |\hat{u}(r,\omega)|^2 dS_\omega dr. \end{aligned}$$

从而

$$\frac{d}{d\lambda}\|\widehat{E(\lambda)u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\frac{1}{2}\lambda^{-\frac{1}{2}}\int_{|\omega|=\sqrt{\lambda}}|\hat{u}(\sqrt{\lambda},\omega)|^2dS_\omega.$$

进一步可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\lambda^2d\|E(\lambda)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= (2\pi)^{-n}\int_0^\infty\lambda^2d\|\widehat{E(\lambda)u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &= (2\pi)^{-n}\int_0^\infty\frac{1}{2}\lambda^{2-\frac{1}{2}}\int_{|\omega|=\sqrt{\lambda}}|\hat{u}(\sqrt{\lambda},\omega)|^2dS_\omega d\lambda\\ &= (2\pi)^{-n}\int_0^\infty\mu^4\int_{|\omega|=\mu}|\hat{u}(\mu,\omega)|^2dS_\omega d\mu\\ &= (2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{|\omega|=\mu}|\mu^2\hat{u}(\mu,\omega)|^2dS_\omega d\mu\\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{-\Delta u}(\xi)|^2d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|-\Delta u(x)|^2dx=\|-\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

即

$$\int_0^\infty\lambda^2d\|E(\lambda)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|-\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},\quad\lambda>0.\tag{B10}$$

设$u,v\in D(-\Delta)=H^2(\mathbb{R}^n)$. 则对任意的$\lambda>0$, 成立

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda d(E(\lambda)u,v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= (2\pi)^{-n}\int_0^\infty \lambda d(\widehat{E(\lambda)u},\hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= (2\pi)^{-n}\int_0^\infty \lambda d\Big[\int_{|\xi|\le\sqrt{\lambda}} \hat{u}(\xi)\bar{\hat{v}}(\xi)d\xi\Big];\end{aligned}$$

以及

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{|\xi|\le\sqrt{\lambda}} \hat{u}(\xi)\bar{\hat{v}}(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{1}{2}}\int_{|\omega|=\sqrt{\lambda}} \hat{u}(\sqrt{\lambda},\omega)\bar{\hat{v}}(\sqrt{\lambda},\omega)dS_\omega.$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \lambda d(E(\lambda)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= (2\pi)^{-n} \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\lambda^{1-\frac{1}{2}} \int_{|\omega|=\sqrt{\lambda}} \hat{u}(\sqrt{\lambda}, \omega)\bar{\hat{v}}(\sqrt{\lambda}, \omega) dS_\omega d\lambda \\
&= (2\pi)^{-n} \int_0^{\infty} \mu^2 \int_{|\omega|=\mu} \hat{u}(\mu, \omega)\bar{\hat{v}}(\mu, \omega) dS_\omega d\mu \\
&= (2\pi)^{-n} \int_0^{\infty} \int_{|\omega|=\mu} [\mu^2 \hat{u}(\mu, \omega)]\bar{\hat{v}}(\mu, \omega) dS_\omega d\mu \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{-\Delta u}(\xi)\bar{\hat{v}}(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u)(x)\bar{v}(x) dx = (-\Delta u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

即

$$\int_0^{\infty} \lambda d(E(\lambda)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (-\Delta u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \qquad (B11)$$

根据(B10), (B11) 以及自伴算子谱分解的唯一性, 可知投影算子$E(\lambda)$表达式只能是(B9)形式. □

谢 谢 !!