非线性 Dirac 系统 —— 变分与交叉

丁彦恒

(部分与 郭琪、董晓婧、余渊洋 合作)

中国科学院数学与系统科学研究院

北京

1. 一、变分方法与交叉科学
2. 二、非线性Dirac 方程 (近年研究综述)
3. 三、新进展：双非线性量子力学系统
4. 四、证明梗概

♦ 交叉科学

自然界的演化通常是以交叉科学的形式表现和发展的。交叉科学的重要性主要体现在:

- 综合性地解决人类面临的重大科学和社会问题。交叉科学是自然科学与社会科学等大门类科学之间发生的外部交叉、以及本门类科学内部众多学科之间发生的内部交叉所形成的系统性的知识体系。
- 学科交叉点往往对应科学新的生长点、新的科学前沿, 这里最有可能产生重大的科学突破, 使科学发生革命性的变化。
- 社会进步、科学发展需要加强交叉学科。
- 国内外十分重视对交叉科学，成立了许多交叉科学研究中心或实验室等。

♦ 变分原理—自然法则

变分原理是客观事物遵守的自然法则。运动是物质的存在方式，运动与力及能量紧密联系，能量的变分对应事物的Lagrange方程.

事物(物质)	➞	运动 (力、能量Φ)
描述事物	➞	方程 $(Au = N(u))$
事物状态	➞	Φ的临界点 $(\nabla\Phi(u) = 0)$.

因此，变分理论是研究事物的重要手段。

自然科学中几例交叉领域，在其中变分理论发挥着强大作用：

- 宇宙学(中微子、暗物质与暗能量、多体问题、自旋流形)；
- “力学就是变分”（钱伟长)；
- 理论力学(Hamilton) • 相对论 • 热力学和统计物理 • 材料力学 • 流体力学（Navier-Stokes方程组)；
- 量子力学(Schrödinger 方程、Dirac 系统，Bose-Einstein 凝聚)；
- 杨-米尔斯理论。

♦ 半线性问题的变分框架 [1] [2]

考虑抽象变分系统

$$Au = N(u), \qquad u \in H \tag{AS}$$

其中 H 是Hilbert空间，A 是自共轭算子, N 是非线性梯度：$\nabla\Psi(u) = N(u)$.

由A 的谱导出正交分解

$$H = H^- \oplus H^0 \oplus H^+, \quad u = u^- + u^0 + u^+$$

使$A|_{H^-} < 0$, $A|_{H^+} > 0$, $A|_{H^0} = 0$. 置$E = \mathscr{D}(|A|^{1/2})$，赋以内积

$$(u, v)_E := (|A|^{1/2}u, |A|^{1/2}v)_H + (u^0, v^0)_H; \ \|u\|_E^2 = (u, u)_E$$

则$E = E^- \oplus H^0 \oplus E^+$，其中$E^0 = H^0$, $E^\pm = E \cap H^\pm$. 定义

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\left(\|u^+\|_E^2 - \|u^-\|_E^2\right) - \Psi(u) \quad \forall u \in E.$$

则Φ 的临界点对应于方程(AS) 的解.

---

[1] Y. Ding: World Scientific Publ. 2007

[2] 丁彦恒: 变分方法与交叉科学. 科学出版社，2022

非线性 Dirac 方程

$$-i\hbar\partial_t\psi = ic\hbar\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\partial_k\psi - mc^2\beta\psi + \nabla_\psi G(x,\psi), \tag{1}$$

其中$x\in\mathbb{R}^3$，$\partial_k=\partial/\partial x_k$，$G:\mathbb{R}^3\times\mathbb{C}^4\to\mathbb{R}$，$\psi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}^4$ 电子波函数，c 光速, m 电子质量, $\hbar$ Planck 常数, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及β 是4×4 Pauli-Dirac 矩阵:

$$\beta=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\quad \alpha_k=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k\\ \sigma_k & 0\end{pmatrix}\quad (k=1,2,3)$$

这里

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

- **稳态方程**

假定$G(x,e^{i\theta}\psi)=G(x,\psi)$ $(\forall\theta\in[0,2\pi])$, 方程(1)的驻波解是形如$\psi(t,x)=e^{\frac{i\mu t}{\hbar}}u(x)$的解. 代入并经整理后可见$\psi(t,x)$ 是(1) 的解当且仅当$u(x)$是下述方程的解:

$$-i\hbar\alpha\cdot\nabla u+a\beta u+V(x)u=G_u(x,u) \tag{2}$$

其中

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\quad \alpha\cdot\nabla=\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\partial_k$$

称方程(2) 为稳态Dirac 方程, u 为**稳态解**.

♦ Soler 模(解的存在性、多解性)[3] [4]

$$-i\alpha\cdot\nabla u + a\beta u + \omega u = F_u(u) \tag{3}$$

这里$a>0$, $\omega\in(-a,0)$,

$$F(u)=\frac{1}{2}H(\tilde{u}u),\ \ H\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \ H(0)=0,\ \ \tilde{u}u:=(\beta u,u)_{\mathbb{C}^4}.$$

求如下形式的解

$$u(x)=\begin{pmatrix} v(r) \\ 0 \\ iw(r)\cos\vartheta \\ iw(r)e^{i\phi}\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

(r,ϑ,ϕ) 是球面坐标系. 问题转化为解一个常微分方程组（利用打靶法）.

类似地处理

$$F(u)=\frac{1}{2}|\tilde{u}u|^2+b|\tilde{u}\alpha u|^2,\ \ \tilde{u}\alpha u:=(\tilde{u},\alpha u)_{\mathbb{C}^4},\ \ \alpha=\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

---

[3] M. Balabane etc. CMP (1988)

[4] M.J. Esteban, E. Séré etc. (变分法) CMP 1995; BAMS 2008

♦ 方程(2)$_{\hbar=1}$

- **Case 1.** $W^{1,r}$解 [5] [6] [7] [8] [9] 考 $V(x)|u|^2$ + 渐进或超二次(或临界)非线性
  - 强制位势 $V(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$;
  - 极限 $\liminf_{|x|\to\infty} V(x) > a$;
  - Coulomb 型位势 $V \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $0 \geq V(x) \geq -\frac{\kappa}{|x|}$, $\kappa < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
  - 周期位势 $V(x+T) = V(x)$;
  - 矩阵位势$M(x)$、特别 $V(x)\beta$ 型位势取代前面的函数$V(x)$.
  - 凹凸非线性[10]
  - 非相对极限[11]

---

[5] T. Bartsch, Y. Ding: Math. Nachr. 2006
[6] Y. Ding, B. Ruf: ARMA 2008
[7] T. Bartsch, Y. Ding: JDE 2006
[8] Y. Ding: World Scientific 2007
[9] Y. Ding, J. Wei: Rev. Math. Phys. 2008
[10] Y. Ding, X. Dong: Z. Angew. Math. Phys. 2021
[11] Y. Ding, X. Dong, Q. Guo: Calc. Var. Partial Differential Equations 2021

- **Case 2.** T-**周期解** [12] [13] [14] [15] 当 $V(x+T)=V(x), G(x+T,u)=G(x,u)$.
  - 超二次问题: $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{G(x,u)}{|u|^2}=\infty$;
  - 次二次问题: $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{G(x,u)}{|u|^2}=0$;
  - 凹凸非线性问题: $G(u)\sim\zeta|u|^q+\eta|u|^p \quad (1<q<2<p<3)$;
  - 渐进二次问题: $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{G(x,u)}{|u|^2}=\lambda>0$;
  - 对称扰动问题: $G(x,u)=\gamma|u|^p+f(x,u)$, $|f(x,u)|$ 非对称且次二次.

[12] Y. Ding, X. Liu: Nonlinear Anal. 2014
[13] Y. Ding, X. Liu: JDE, 2015
[14] Y. Ding, X. Liu: Ann. Mat.Pura Appl.(4), 2017
[15] Y. Ding, X. Liu: JMP, 2018

♦ 方程$(2)_{\hbar=\varepsilon}$

- **Case 3. 半经典解**: $\varepsilon \to 0$ 存在性、集中性、指数衰减性.
  - 集中于非线性位势[16]: $V \equiv 0,\ G(x,u) \sim W(x)|u|^p,\ 2 < p < 3$
  - 竞争位势[17] [18]: $\sim V(x)|u|^2 - W(x)|u|^p,\ 2 < p < 3$
  - 临界非线性[19]: $G(x,u) = W_1(x)|u|^q + W_2(x)|u|^3,\ 2 < q < 3.$
  - 局部集中[20]: $\min\limits_{\Omega} V < \min\limits_{\partial\Omega} V,\ \exists\,\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 有界.
  - 空间维数n、多重性[21]

[16] Y. Ding: JDE, 2010
[17] Y. Ding, X. Liu: JDE, 2012
[18] Y. Ding, C. Lee, B. Ruf: Proc. Roy. Soc. Edingburgh Sect. A, 2013
[19] Y. Ding, B. Ruf: SIAM J. Math. Anal. 2012.
[20] Y. Ding, T. Xu: Arch. Ration. Mech. Anal. 2015
[21] Y. Ding, X. Dong, Q. Guo: DCDS, 2021

(2) 自旋流形 (紧M) 上的 Dirac 方程

- 分歧现象[22] $(\partial M=\emptyset)$: $\mu D\psi=\psi+h(\psi)$ on M, 令 $1/\mu_k\in$ spec(D), 则在适当超线性条件下, $\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, 证明 (μ_k,θ) 是分歧点; 在次线性条件下, 证明 (μ_k,∞) 是分歧点.
- 边值问题[23] $(\partial M\neq\emptyset)$: $P\psi=h(\psi)$; $B_{\mathrm{CHI}}(\psi)=0$. 其中P 是带边流形上的Dirac 算子, B_{CHI} 是Chiral 边界条件. 在适当条件下证明其解的存在性与多重性.

[22] Y. Ding, J. Li, T. Xu: Calc. Var. PDE, 2016
[23] Y. Ding, J. Li: Calc. Var. PDE, 2018

(3) 非线性量子力学系统

- Maxwell-Dirac system [24] [25] [26]

$$\begin{cases} \alpha\cdot\left(i\varepsilon\nabla+Q(x)\bar{A}\right)w-\beta w-\omega w-Q(x)A_0w=f(x,|w|)w \\ -\Delta A_k=4\pi Q(x)(\alpha_k w)\bar{w} \qquad k=0,1,2,3, \end{cases} \tag{4}$$

其中$\bar{A}=(A_1,A_2,A_3)$. 在关于 f 适当的超线性假设下，建立了(4)的半经典解的存在性、集中性、指数衰减性.

- Dirac－Klein－Gordon system [27]:

$$\begin{cases} i\varepsilon\,\alpha\cdot\nabla\varphi-a\beta\varphi+\omega\varphi-\lambda\phi\beta\varphi=W(x)g(|\varphi|)\varphi\,, \\ -\varepsilon^2\Delta\phi+M\phi=4\pi\lambda(\beta\varphi)\cdot\varphi\,. \end{cases} \tag{5}$$

类似对(4) 我们建立了(5)的半经典解的存在性、集中性、指数衰减性.

---

[24] Y. Ding, T. Xu: C. V. PDE, 2013
[25] Y. Ding, J. Wei, T. Xu: JMP 2013
[26] Y. Ding, B. Ruf: JDE, 2016.
[27] Y. Ding, T. Xu: JDE 2014

(1) Dirac-Klein-Gordon 系统

$$\begin{cases} -i\alpha\cdot\nabla u+(m+V(x))\beta u+\omega u=\phi\beta u+K(x)|u|^{p-2}u, \\ -\Delta\phi+(M^2+\hat{V}(x))\phi=\langle\beta u,u\rangle+\hat{K}(x)|\phi|^{q-2}\phi, \end{cases} \tag{6}$$

其中, $x\in\mathbb{R}^3$, $u(x)\in\mathbb{C}^4$, $\phi(x)\in\mathbb{R}$, m, M 分别是电子和介子的质量，$V(x)$, $\hat{V}(x)$, $K(x)$, $\hat{K}(x)$ 是实值函数.

此外，我们也考虑交叉型非线性问题:

$$\begin{cases} -i\alpha\cdot\nabla u+(m+V(x))\beta u+\omega u=f(x,u,\phi), \\ -\Delta\phi+(M^2+\hat{V}(x))\phi=g(x,u,\phi). \end{cases} \tag{6'}$$

这里

$$\begin{cases} f(x,u,\phi)=\dfrac{s_1}{2}|u|^{s_1-2}|\phi|^{s_2}u+K(x)|u|^{p-2}u, \\ g(x,u,\phi)=s_2|u|^{s_1}|\phi|^{s_2-2}\phi+\hat{K}(x)|\phi|^{q-2}\phi. \end{cases} \tag{H}$$

◀ 物理背景

这些问题来自于受非线性场影响的相对论效应的粒子的相互作用. 在量子场论中, 粒子被看作对应量子场的态, 比如光子来自于电磁场的量子化, 电子和希格斯 (Higgs) 粒子分别对应于 Dirac 场和 Klein-Gordon 场(或标量场). 考虑相对论效应的粒子的相交理论在数学上有很大的复杂性, 这是源于粒子的存在和消失过程. 历史上, 由于数学发展一时的局限, 产生的研究结果基本都不考虑系统中相应标量场的非线性效应的问题, 遑论处理两个或者多个非线性场的相互作用. 于是人们得发展新的研究方法.

较准确地说，过去关于系统 (6) 的研究通常假设其 Klein-Gordon 场, 记为(6_ϕ), 关于ϕ是线性的. 例如

$$\begin{cases} -i\alpha\cdot\nabla u + a\beta u - \omega u + \lambda\phi\beta u = f(x,|u|)u\,, \\ -\Delta\phi + M\phi = 4\pi\lambda(\beta u)\cdot u\,. \end{cases} \tag{†}$$

应用椭圆方程理论可知(6_ϕ) 有唯一解ϕ_u. 将此解代入第一个方程化得所谓的 “非局部” 问题：

$$-i\alpha\cdot\nabla u + a\beta u - \omega u + \lambda\phi_u\beta u = f(x,|u|)u,$$

求之即得原系统(†) 的解.

当其第二个方程也带(关于ϕ的) 非线性时，事情就复杂多了，特别是不能先求得ϕ, 再把系统转化为单个方程来处理. 为了克服由此带来的困难, 我们从整体的角度来处理这个问题, 即将之视为一个整体, 再根据抽象的临界点定理, 得到其稳态解的存在性与多重性结果.

◀ 主要结果

★ 周期非线性情形

我们做如下假设(应对于不同的场合), 记 $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$:

▼ 对于线性位势,

(V_0) $V(x) \equiv 0$, $\hat{V}(x) \equiv a \in (-M^2, \infty)$.

(V_1) $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_+)$, $\hat{V} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_+)$, 它们关于 x_k 是 1- 周期的, $k = 1, 2, 3$.

▼ 对于非线性位势,

(K) $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_+)$, $\hat{K} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_+)$, 它们关于 x_k 是 1-周期的, $k = 1, 2, 3$.

- 以 S_ℓ 与 $\hat{S}_\ell$ 分别记系统(6)与系统(6')的极小能量解之集合.

Theorem (1. Y. Ding, Q. Guo, B. Ruf: SIAM JMA, 2021)

设 $\omega \in (-m, m)$, $p \in (2,3)$, $q \in (2,6)$, (V_0) 或(V_1). 又设 (K) 成立. 那么

- (6) 有至少一个基态解 $(u,\phi) \in H^{\frac{1}{2}} \times H^1$. 若还有 $q \leq 4$, 则
$$(u,\phi) \in W^{1,r}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \times W^{2,s}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \forall r, s \geq 2.$$
- 存在 $C, c > 0$, 使得
$$|u(x)| + |\phi(x)| \leq C \exp(-c|x|), \ \forall x \in \mathbb{R}^3, (u,\phi) \in S_\ell.$$
- (6) 有无穷多的几何不同解.

Theorem (1', Y. Ding, Q. Guo, B. Ruf: SIAM JMA, 2021)

假设：系统$(6')$的非线性具有形式(H)；$\omega \in (-m, m)$, $s_1, s_2 > 1, 2s_1 + s_2 < 6$, $p \in (2,3)$, $q \in (2,6)$, 以及(V_0) 和(V_1) 之一成立；又令 (K) 成立. 那么

- $(6')$ 有至少一个基态解 $(u,\phi) \in H^{\frac{1}{2}} \times H^1$. 若进一步有 $q \le 4$, $s_2 < 2$, 则

$$(u,\phi) \in W^{1,r}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \times W^{2,s}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \forall r, s \ge 2.$$

- 存在 $C, c > 0$, 使得

$$|u(x)| + |\phi(x)| \le C \exp(-c|x|) \ \forall x \in \mathbb{R}^3, (u,\phi) \in \hat{S}_\ell.$$

- $(6')$ 有无穷多的几何不同解.

★ 半经典情形

考虑半经典极限问题 $(6)_\varepsilon$：

$$\begin{cases} -i\varepsilon\alpha\cdot\nabla u+\big(\omega+m\beta+V_1(x)\big)u=\dfrac{s_1}{2}|u|^{s_1-2}|\phi|^{s_2}u+K(x)|u|^{p-2}u,\\ -\varepsilon^2\Delta\phi+(V_2(x)+M^2)\phi=s_2|u|^{s_1}|\phi|^{s_2-2}\phi+Q(x)|\phi|^{q-2}\phi.\end{cases}$$

置 $(j=1,2)$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}_j:=\{x\in\mathbb{R}^3:V_j(x)=V_{j,\min}\},\\
&\mathcal{K}:=\{x\in\mathbb{R}^3:K(x)=K_{\max}\},\\
&\mathcal{Q}:=\{x\in\mathbb{R}^3:Q(x)=Q_{\max}\},\\
&V_{j,\infty}:=\liminf_{|x|\to\infty}V_j(x),\\
&K_\infty:=\limsup_{|x|\to\infty}K(x)<\infty,\\
&Q_\infty:=\limsup_{|x|\to\infty}Q(x)<\infty.
\end{aligned}$$

假设

(A_0) $V_1, V_2, K, Q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $|V_1|_{\max} < m$, 及 $V_{2,\min}$、$K_{\min}$、$Q_{\min}$ 均正;

(A_1) $\mathcal{M} := \mathcal{K} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$;

(A_2) $K_{\max} > K_\infty$, 且存在 $R > 0$ 及 $x^* \in \mathcal{M}$, 使得 $(j = 1, 2)$

$$V_j(x^*) \le V_j(x) \qquad \forall\, |x| \ge R.$$

此外，为描述集中现象，置 $(j = 1, 2)$

$$\mathcal{A}_{V_j} := \{x \in \mathcal{M} : V_j(x) \le V_j(x^*)\} \cup \{x \notin \mathcal{M} : V_j(x) < V_j(x^*)\}$$

Theorem (2, Y. Ding, Q. Guo, Y. Yu)

假设 $\omega \in (-m, m)$, $s_1, s_2 > 1$, $2s_1 + s_2 < 6$, $p \in (2,3)$, $q \in (2,6)$, 以及 (A_0), (A_1), (A_2) 满足, 则 $\forall \varepsilon > 0$ 充分小时:

- 系统 $(6)_\varepsilon$ 至少有一个最小能量解 $z_\varepsilon = (u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) \in H^{\frac{1}{2}} \times H^1$. 进一步, 若 $q \le 4, s_2 < 2$, 则 $z_\varepsilon \in W^{1,r}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \times W^{2,s}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $\forall r, s \ge 2$.
- $|z_\varepsilon|$ 有最大值点 x_ε, 使得 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathit{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{A}_{V_1} \cup \mathcal{A}_{V_2}) = 0$, 且沿子列$x_\varepsilon \to x_0$, $\hat{z}_\varepsilon(x) := z_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon)$ 在 $H^1 \times H^2$ 中收敛到下述系统的最小能量解:

$$\begin{cases} -i\alpha \cdot \nabla u + \big(\omega + m\beta + V_1(x_0)\big)u = s_1|u|^{s_1-2}|\phi|^{s_2}u + K(x_0)|u|^{p-2}u, \\ -\Delta\phi + V_2(x_0)\phi + M^2\phi = s_2|u|^{s_1}|\phi|^{s_2-2}\phi + Q(x_0)|\phi|^{q-2}\phi. \end{cases}$$

- $\exists C, c > 0$ 不依赖于 ε 使得

$$|z_\varepsilon(x)| \le C\exp(-\frac{c}{\varepsilon}|x - x_\varepsilon|), \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

作为对偶的情形, 假设

(A_1') $\mathcal{M}' := \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$;

(A_2') $V_{1,\min} < V_{1,\infty}$ 且存在充分大的 $R > 0$ 以及 $x^* \in \mathcal{M}'$, 使得当 $|x| \geq R$ 时, 成立

$$K(x^*) \leq K(x), \quad Q(x^*) \leq Q(x).$$

置

$$\mathcal{A}_K := \{x \in \mathcal{M}' : K(x) \leq K(x^*)\} \cup \{x \notin \mathcal{M}' : K(x) < K(x^*)\}$$

$$\mathcal{A}_Q := \{x \in \mathcal{M}' : Q(x) \leq Q(x^*)\} \cup \{x \notin \mathcal{M}' : Q(x) < Q(x^*)\}.$$

Theorem (2', Y. Ding, Q. Guo, Y. Yu)

假设 $\omega \in (-m, m), s_1, s_2 > 1, 2s_1 + s_2 < 6, p \in (2, 3), q \in (2, 6)$, 以及 (A_0), (A_1'), (A_2') 满足, 则以 $\mathcal{A}_K \cup \mathcal{A}_Q$ 取代 $\mathcal{A}_{V_1} \cup \mathcal{A}_{V_2}$ 后, 定理 *(2)* 的所有结论仍为真.

(2) Dirac-Maxwell 系统

$$\begin{cases} \alpha\cdot(-i\nabla+\bar{A})u+(m+V(x))\beta u+\omega u=A_0u+K(x)|u|^{p-2}u, \\ -\Delta A_k+\hat{V}(x)A_k=\langle\alpha_k u,u\rangle+\hat{K}(x)|\vec{A}|^{q-2}A_k,\ \ k=0,1,2,3 \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\bar{A}=(A_1,A_2,A_3)$, $\vec{A}=(A_0,A_1,A_2,A_3)$, $\alpha\cdot\bar{A}=\sum_{k=1}^{3}A_k\alpha_k$.

若记(7)右边的项分别为 f 和 g, 则可考虑下述交叉非线性

$$\begin{cases} f(x,u,\vec{A})=\dfrac{s_1}{2}|u|^{s_1-2}|\vec{A}|^{s_2}u+K(x)|u|^{p-2}u, \\ g(x,u,\vec{A})=s_2|u|^{s_1}|\vec{A}|^{s_2-2}A_k+\hat{K}(x)|\vec{A}|^{q-2}A_k, \end{cases} \tag{H}$$

或更一般的非线性 f,g. 我们得到了类似于Dirac-Klein-Gordon 系统的结果.

Theorem (Y. Ding, Q. Guo, 2021)

- $\forall\, |\omega| < m$, $p \in (2,3)$, $q \in (2,6)$, $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} \le 1$, 又设 (K)、(V_0) 或(V_1), 则

  1° (7) 有至少一个基态解 $(u, \vec{A}) \in H^{\frac{1}{2}} \times H^1$. 若还有 $q \le 4$, 则

  $$(u, \vec{A}) \in W^{1,r}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \times W^{2,s}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4),\ \forall\, r, s \ge 2.$$

  2° $\exists\, C, c > 0$, 使得

  $$|u(x)| + |\vec{A}(x)| \le C \exp(-c|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^3, (u, \vec{A}) \in S_\ell.$$

  3° (7) 有无穷多的几何不同解.

- 假设系统(7)的非线性具有形式(H); $\omega \in (-m, m)$, $s_1, s_2 > 1, 2s_1 + s_2 < 6$, $p \in (2,3)$, $q \in (2,6)$, (V_0) 或(V_1); 又设 (K). 那么上述结论仍然有效.

(3) 非相对论极限

关于小质量问题，我们证明了当光速和频率趋于无穷的时候，非线性Dirac 方程的解收敛到对应非线性Schrödinger方程的解.

考虑如下的方程

$$-ic\alpha\cdot\nabla\psi+mc^2\beta\psi-\omega\psi=|\psi|^{p-2}\psi,\quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{8}$$

对应的非线性Schrödinger方程为

$$\begin{cases}-\Delta u_1-\nu u_1=2mg(|u|)u_1,\\ -\Delta u_2-\nu u_2=2mg(|u|)u_2,\end{cases} \tag{‡}$$

Theorem (Y. Ding, X. Dong, Q. Guo: CVPDE, 2021)

令$m > 0, \nu < 0, p \in (2, \frac{5}{2}]$. 假定$\{c_n\}, \{\omega_n\}$为满足下列条件的序列

$$0 < c_n, \omega_n \to +\infty,$$

$$0 < \omega_n < mc_n^2,$$

$$\omega_n - mc_n^2 \to \frac{\nu}{m},$$

其中$n \to \infty$. 如果$\{\psi_n = (u_n, v_n)^T\}$是频率$\omega_n$, 光速$c_n$的非线性*Dirac*方程*(8)*的解, 那么存在m_0, 使得当$m \le m_0$ 时,

$$u_n \to u \quad \textit{and} \quad v_n \to 0 \quad \textit{in} \;\; H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2),$$

$n \to \infty$, 其中$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^2$为频率$\nu$, 非线性位势$g(|u|) = |u|^{p-2}$ 的非线性*Schrödinger*方程*(‡)* 的解.

(4) 凹凸非线性

考虑全空间上带凹凸非线性项的 Dirac 方程：

$$-i\alpha\cdot\nabla u + a\beta u + M(x)u = \xi_1 Q(x)|u|^{q-2}u + \xi_2 P(x)|u|^{p-2}u, \qquad (9)$$

其中 $1 < q < \frac{p}{p-1} < 2 < p < 3$, $x \in \mathbb{R}^3$. 记对应的能量泛函为 $I(u)$.

Theorem (Y. Ding, X. Dong: ZAMP, 2021)

- 假设 $\xi_1 \in \mathbb{R}, \xi_2 > 0$. 在适当的假设条件下，存在 $\eta = \eta(q,p) > 0$ 使得若
$$|\xi_1|^{p-2}\xi_2^{2-q} \le \eta,$$
那么 *(9)* 存在一列解 $\{u_n\}$ 满足当 $n \to \infty$ 时 $I(u_n) \to \infty$.
- 假设 $\xi_1 > 0, \xi_2 \in \mathbb{R}$. 在适当的假设条件下，*(9)* 存在一列解 $\{u_n\}$ 满足 $I(u_n) < 0$ 且当 $n \to \infty$ 时 $I(u_n) \to 0$.

四、证明梗概

(1) 将抽象方程 (AS) 的变分框架具体化.

(2) 采用强不定泛函的形变理论与临界点定理

- 局部凸拓扑;
- Lipschitz 正规性;
- 规度空间中的形变理论;
- 有限环绕;
- 群作用与多重临界点.

(3) 例

★ 将所关心的问题描述为抽象系统(AS).

以 Dirac-Klein-Gordon 系统为例. 置

$$A = \begin{pmatrix} -2\hat{\Box} & 0 \\ 0 & -\hat{\Delta} \end{pmatrix}$$

其中，$\hat{\Box} := -i\alpha \cdot \nabla + (m + V(x))\beta + \omega$, $\quad \hat{\Delta} := -\Delta + +\hat{V}(x) + M^2$. 又令 $F(x,z)$ 和 $G(x,z)$, $(z = (u, \phi) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{R})$, 分别表示$f(x,z)$ 和$g(x,z)$ 的原函数，$H(x,z) = F(x,z) + G(x,z)$, 以及

$$\Psi(z) = \int_{\mathbb{R}^3} H(x, z(x))dx, \qquad N(z) = \nabla\Psi(z).$$

则相应的系统可表为抽象形式(AS).

★ 应用前述强不定泛函的临界点定理.

Thanks for your attention !